数理解析研究所講究録
794巻 1992年 73-78

Burnside rings of quantum groups

北大理(M2) 高嶋 研
(Ken Takashima)

Burnside ringは、有限群やコンパクトリー群に対して定義され、有限群論、トポロジーにおいて重要な役割を果たしています。それを「量子群(Hopf algebra)に対しても定義してやることはできないだろうかと考えてみた」というのがここでのお話しです。結局、全く歯が立たなかったのですが、一つの問題提起とお考え下さい。

まずは定義を、

<u>定義</u> kを体、Cをk-ベクトル空間とする。

Cはk-coalgebraである。

$\underset{def}{\iff}$ linear maps $\Delta : C \longrightarrow C\otimes C$, $\varepsilon : C \longrightarrow k$ で

次の図式が可換になるようなものが存在する:

$$\begin{tikzcd} C\otimes C \arrow[r, "id_C\otimes\Delta"] & C\otimes C\otimes C \\ C \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\Delta"'] & C\otimes C \arrow[u, "\Delta\otimes id_C"'] \end{tikzcd} \quad , \quad \begin{tikzcd} & C\otimes C \arrow[dl, "id_C\otimes\varepsilon"'] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes id_C"] & \\ C\otimes k & & k\otimes C \\ & C \arrow[ul, "\sim"] \arrow[uu] \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

定義　k－ベクトル空間 H は Hopf algebra である．

$\underset{def}{\Longleftrightarrow}$ (i)　H は(単位元を持ち結合的な) k-algebra である。

(ii)　H は k－coalgebra であり、Δ. ε は algebra homomolphism である。

(iii)　anti algebra hom　$S : H \longrightarrow H$　で

$$\sum_i S(a_i)b_i = \varepsilon(x)\cdot 1 = \sum_i a_i S(b_i)$$

をみたすものが存在する．

ただし、$x \in H$,　$\Delta(x) = \sum_i a_i \otimes b_i$

Hopf algebra の例としては、群環、代数群の座標環、他、"量子群の座標環" と呼ばれる $A(GL_q(n))$ 等 ([1], [2]) があるが、$A(G_q)$ については特に(代数)群と平行した理論の展開がなされているようなので、Hopf algebra にも Burnsid ring が定義できるかも知れないと簡単に始めてしまったのですが、私の手には余りました。

定義ばかりで申しわけありませんが.

定義　G を有限群、$\mathcal{S}$ を有限 G－集合の同型類全体から成る集合とするとき、$\mathcal{S}$ は disjoint union と cartesian product により半環になる。G の Burnside ring とは、この半環の

universal ring のことをいい，$\Omega(G)$ であらわす。

具体的には以下のように書ける：

$\mathcal{S}$ を base とする free abelian group の tensor algebra を $T\langle\mathcal{S}\rangle$ とする。このとき，

$$\Omega(G) \cong T\langle\mathcal{S}\rangle \Big/ \left([X]+[Y]-[X\dot{\cup}Y],\ [X]\otimes[Y]-[X\times Y],\ 1-[G/G]\right)$$

$\Omega(G)$ は abelian group として free で base は

$\{[G/K] \mid (K)\in C(G)\}$　（$C(G)$ は G の部分群の共役類全体）

である。又，部分群 K，有限 G－集合 X に対し，

$$X^K := \{x\in X \mid ax=x,\ \forall a\in K\}$$

$$\varphi_K(X) := |X^K|$$

と定義すると，φ_K は $\Omega(G)$ から $\mathbb{Z}$ への ring hom を定める。

そして，$\Omega(G)$ に対し，次のような完全列が存在する：

$$0 \longrightarrow \Omega(G) \xrightarrow[\varphi]{} \prod_{(K)\in C(G)} \mathbb{Z} \xrightarrow[\exists\psi]{} \prod_{(K)\in C(G)} \left(\mathbb{Z}\big/|\mathrm{Aut}([G/K])|\mathbb{Z}\right) \longrightarrow 0$$

$$\varphi = \prod_{(K)} \varphi_K$$

このことは重要であり，Hopf algebra に対して Burnside ring が定義できたというのはこのような完全列（特に $\Omega(G)$ の $\prod_{(K)}\mathbb{Z}$ への埋め込み）が存在して言えることだと思われます。

さらに，Burnside ring は，コンパクト リー群に対しても定義されます。この場合，有限 G－集合のかわりに，有限

G－CW複体をとり、2つの有限G－CW複体X, Yに対し、

$$X \sim Y \underset{def}{\Longleftrightarrow} \chi(X^K) = \chi(Y^K) \quad \forall K \leq G$$
(χはEuler標数)

により同値関係を定義し、これによる同値類全体からなる集合より、Burnside ringが定義され、baseは

$\{[G/K] \mid (K) \in \phi(G)\}$ ($\phi(G)$は$|N_G(K)/K| < \infty$なるKの共役類全体)となります。又、$\varphi_K(x) := \chi(X^K)$と定めますと、$\varphi := \prod_{(K)} \varphi_K : \Omega(G) \to \prod_{(K)} \mathbb{Z}$は環の埋め込みになります。(Burnside ringについて詳しくは[3]を御覧下さい。)

このように、Hopf algebra(量子群)に対してBurnside ringを定義するには、G－集合に相当するもの、Euler標数に相当するものが必要であります。G－集合に相当するものは、module coalgebra(作用がcoalgebra hom)、あるいは、comodule algebra(余作用がalgebra hom)でいいのですが、Euler標数に相当するものをどう定義するかが大きな問題として残ります。又、量子群$SU_q(2)$などの場合、等質空間(i.e. transitive G-space)で、量子群の商空間(i.e. G/K)として表せないものがある([4])ので、Burnside ringが定義できたとして何がbaseとなるかも問題であります。

最後に、ちょっと特殊すぎますが、次のようなものが考えられますので、それを紹介して終わりにしたいと思います。

k：有限体

H : cocommutative finite dimentional k-Hopf algebra

$\mathcal{X} :=$ {f.d. cocom left H-comodule algebras}

$X, Y \in \mathcal{X}$ に対し、

$\mathrm{Map}(X, Y) :=$ {X から Y の H-comodule alg homo}

$\mathcal{I} := \{X \in \mathcal{X}, X$ は indec$\}$

このとき、

$$X \cong Y \iff |\mathrm{Map}(I, X)| = |\mathrm{Map}(I, Y)|, \ \forall I \in \mathcal{I}$$

ということがわかります。

又、 $\varphi_I(X) := |\mathrm{Map}(I, X)|$ としますと、

$$\begin{cases} \varphi_I(X \otimes Y) = \varphi_I(X)\varphi_I(Y) \\ \varphi_I(X \oplus Y) = \varphi_I(X) + \varphi_I(Y) \end{cases}$$

となります。

ここで、 $\Omega_h(H) := \langle [X] \mid X \in \mathcal{X} \rangle$ に和と積を

$$[X] + [Y] = [X \oplus Y]$$
$$[X] \cdot [Y] = [X \otimes Y]$$

で定めると、$\Omega_h(H)$ は可換環になり、φ_I は $\Omega_h(H)$ から $\mathbb{Z}$ への ring hom になります。さらに、次のような完全列が

存在します:

$$0 \longrightarrow \Omega_n(H) \xrightarrow{\varphi} \prod_{I \in J} \mathbb{Z} \xrightarrow{\exists \psi} \prod_{I \in J} \left(\mathbb{Z} / |\mathrm{Aut}\, I| \mathbb{Z} \right) \quad .$$

$$\varphi = \prod_I \varphi_I$$

文　　献

〔1〕 阿部: ホップ代数, 岩波書店

〔2〕 N. YU. RESHETIKHIN, L. A. TAKHTADZHYAN, L. D. FADDEEV; Leningrad. Math. J. Vol 1. No. 1. 1990, 193 − 225

〔3〕 T. tom Dieck: Transformation groups, Walter de Gruyter, 1987

〔4〕 野海, 三町: Quantum Homogenous Spaces and Spherical Functions, 第35回代数学シンポジウム報告集